

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

ОПТИМИЗАЦИЯ ОБЧИСЛЕНЬ В РЕГУЛЯРИЗАЦИЙНЫХ АЛГОРИТМАХ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ВІДНОВЛЕННЯ РОЗМИТИХ ЗОБРАЖЕНЬ

Гарт Людмила Лаврентіївна

*кандидат фізико-математичних наук, доцент,
завідуюча науково-дослідної лабораторії оптимізації с
кладних систем кафедри обчислювальної математики та математичної кібернетики,
Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара*

CALCULATION OPTIMIZATION IN REGULARIZATION ALGORITHMS OF SOLVING RECONSTRUCTION BLURRED IMAGES PROBLEM

Hart L.L.,

*candidate of physico-mathematical sciences, docent, chief of the complex systems optimization's laboratory of
the calculating mathematics and mathematical cybernetics chair, Oles Honchar Dnipropetrovsk National University*

АНОТАЦІЯ

Досліджені теоретичні і практичні аспекти оптимізації обчислень під час застосування алгоритмів регуляризації, основаних на ітеративному методі В.М. Фрідмана, до розв'язання задачі відновлення спотворених (змазаних та дефокусованих) зображень. Створений програмний продукт дозволяє конвертувати кольорове зображення в сіре, моделювати змазування і дефокусування отриманого зображення та шляхом зведення задачі відновлення цього зображення до задачі розв'язання інтегрального рівняння Фредгольма I роду типу згортки отримувати його регуляризований розв'язок. Розглянуто деякі способи суттєвого зменшення обчислювальних витрат на реалізацію запропонованих алгоритмів, в тому числі проєкційно-ітераційний підхід, який до названого

Ключові слова: змазане зображення, інтегральне рівняння I роду, некоректна задача, метод регуляризації Фрідмана, оптимізація обчислень, проєкційно-ітераційний алгоритм, наближений розв'язок, відновлення зображення.

SUMMARY

Theoretical and practical aspects of calculation optimization during the application of regularization algorithms based on Friedman iterative method to the solution of reconstruction blurred images problem are researched. Created software allows a user to convert color image into gray, simulate the blurring and de-blurring the obtained image and receive the regularized solution of the reconstruction this image problem as the problem of solving the Fredholm integral equation of the first kind. Some ways of essential reducing computing costs for implementation of the proposed algorithms are described, including the projection-iterative approach which is for the first time applied to this problems class.

Key words: blurred image, integral equation of the first kind, ill-posed problem, Friedman regularization method, calculation optimization, projection-iteration algorithm, approximate solution, image reconstruction.

Постановка проблеми. Будь-яка система формування, передачі та реєстрації відеосигналу не є ідеальною, а тому вона вносить різні за своїм фізичним походженням спотворення. Наприклад, до спотворень призводять аберації в оптичних системах, турбулентність середовища в астрономії та гідролокації, відносний рух системи, що реєструє, і об'єкта. Зображення, які сформовані такими системами, як правило, не піддаються інтер-претації. Тому досить актуальною є задача відновлення (реконструкції) початкового неспотвореного зображення за заданим спотвореним. В якості досить повної матема-

тичної моделі зображувальних систем, як правило, використовують лінійне інтегральне рівняння I роду, а сама за-дача відновлення формулюється як типова обернена за-дача з неповними даними. Задача обробки і відновлення спотворених зображень у загальному вигляді може бути сформульована як недовизначена обернена задача математичної фізики.

Відомі задачі відновлення спотворених (змазаних, дефокусованих) зображень сформульовані в роботах [1–5] та ін. Вони зазвичай описуються набором одновимірних інтегральних рівнянь (IP) Фредгольма I роду типу згортки

$$Aw \equiv \int_a^b h(x - \xi)w_y(\xi)d\xi = g_y(x) + \delta g, a \leq x \leq b, c \leq y \leq d \quad (1)$$

або одним двовимірним IP Фредгольма I роду типу згортки

$$Aw \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x - \xi, y - \eta)w(\xi, \eta)d\xi d\eta = g(x, y) + \delta g,$$

(2) де h – ядро інтегрального рівняння, що має смисл функції розсіювання точки (ФРТ), у більшості випадків просто-риво-інваріантної (різницевої); A – лінійний інтегральний оператор; w і g – розподіл інтенсивності за істинним та спотвореним зображеннями відповідно; δg – похибка. В (1) вісь Ox спрямована вздовж змазування, а u відіграє

роль параметра. Набір рівнянь (1) часто використовується в задачі змазування, а (2) – в задачі дефокусування зображення [2–5].

Дана робота присвячена дослідженню способів оптимізації обчислювальних витрат під час розв'язання задачі відновлення спотворених зображень шляхом реалізації наступних етапів:

- для конкретного зображення змоделювати змазування відповідно до (1) та дефокусування відповідно до (2), а саме розв'язати пряму задачу, в якій шуканими функціями є $g_y(x)$ та $g(x, y)$ відповідно;
- застосувати для розв'язання оберненої задачі (1), в якій $w_y(x)$ невідома, та оберненої задачі (2), в якій $w(x, y)$ невідома, обчислювальні схеми, засновані на методі регуляризації Фрідмана [6], в тому числі його проекційно-ітераційну модифікацію [7];
- дослідити способи зменшення обчислювальних витрат на реалізацію обчислювальних схем, зробити порівняльний аналіз отриманих результатів, сформулювати висновки щодо їх ефективності. Аналіз останніх досліджень і публікацій. На

Відновлення змазаних зображень, як вже відмічалося раніше, зазвичай описується інтегральними рівняннями I роду. Задача їх розв'язання є некоректною. До теперішнього часу розроблено ряд ефективних методів стійкого розв'язання некоректних задач. Можна виділити групу методів, які були розвинуті радянськими вченими – методи регуляризації Тихонова, ітеративної, статистичної, локальної, дескриптивної регуляризації, субоптимальної фільтрації та інші, а також групу методів, які були розвинуті західними вченими – методи оптимальної фільтрації Калмана-Б'юсі та Вінера, методи керованої лінійної фільтрації (Бейкуса-Гільберта) та інші, які є дещо більш точними. Але методи першої групи (наприклад, методи регуляризації Тихонова та Фрідмана) потребують значно менше додаткової інформації про розв'язок і тому знаходять більш широке застосування при розв'язанні обернених прикладних задач. У задачу розробки методів відновлення спотворених зображень великий внесок

$$Aw \equiv \int_a^b h(x - \xi) w_y(\xi) d\xi$$

Далі з використанням методу скінчених сум [6] можна провести дискретизацію рівняння (5), внаслідок чого отримати систему рівностей для визначення невідомої правої частини.

Зауваження. Відомо, що на персональному комп'ютері (ПК) в системі Windows на одну точку зображення відводиться 32 біти (4 Б). Із них перший байт (A) відповідає за прозорість зображення, а три інших байти (R, G та B) містять значення інтенсивностей за відповідними кольоровими каналами. В даній роботі розглядається обробка сірих зображень, тому для конвертації зображення в сіре покладаємо за замовчуванням $A = 255$, $R = G = B = (R_{\text{поч}} + G_{\text{поч}} + B_{\text{поч}})/3$. Дані про кожну точку мають тип `byte`, значення якого належать діапазону 0–255, в той час як розв'язання прямої та оберненої задач відбувається з даними типу `double`. В зв'язку з цим для чисельної реалізації алгоритмів початкові дані перетворюються у формат `double`. При цьому для збереження діапазону

зробили М. Мак-Доннел, Р. Бейтс [1], А. Б. Бакушинський, О. В. Гончарський [2], В. С. Сізіков [3, 6, 8-12], Р. Гонсалес, Р. Вудс, С. Еддінс [4, 5], А. М. Тихонов, В. В. Степанов, А. Г. Ягола [13] та інші автори.

Виділення раніше невирішених частин загальної проблеми. Існуючі методи реконструкції зображень не завжди дають позитивний результат. Це пов'язано або з неадекватним математичним описанням задачі, або з тим, що на зображенні часто виникають хибні хвилі. У роботах деяких західних учених часто використовуються так звані «граничні умови» для визначення інтенсивностей за межами зображення, однак цей прийом є дещо штучним і до того ж призводить до складного математичного апарату. Крім того, залишається досі відкритим питання пошуку ефективних способів зменшення обчислювальних витрат під час реконструкції зображень. Усе це свідчить про актуальність подальшого розвитку та удосконалення методів наближеного розв'язання задачі відновлення спотворених зображень.

Ціль статті полягає у дослідженні теоретичних і практичних аспектів оптимізації обчислень під час застосування алгоритмів регуляризації, основаних на ітеративному методі Фрідмана, до розв'язання задачі відновлення спотворених (змазаних та дефокусованих) зображень.

$$0, h(r) = \begin{cases} 1/\Delta, & -\Delta \leq r \leq \Delta \\ 0, & \text{інакше} \end{cases} \quad (3)$$

де Δ – величина змазування, параметр, що обирається. Відповідно до (3) рівняння (1) набуває вигляду

$$Aw \equiv \frac{1}{\Delta} \int_x^{x+\Delta} w_y(\xi) d\xi = g_y(x) + \delta g, \quad c \leq y \leq d \quad (4)$$

При $a \leq x \leq b$ з (4) видно, що значення інтенсивностей початкового зображення необхідно визначити на проміжку $[a; b + \Delta]$. Вважаючи функцію $w_y(x)$ за межами $[a; b]$ тотожним нулем [8], будемо мати

$$Aw \equiv \int_a^b h(x - \xi) w_y(\xi) d\xi = g_y(x) + \delta g, \quad a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d \quad (5)$$

0–255 даних вводиться нормування ФРТ, після чого обчислюється зортка з нормованою ФРТ (пряма задача). Для виведення на екран отриманого спотвореного зображення здійснюється зворотне перетворення типу `double` у тип `byte`. Дробова частина даних при цьому втрачається, тому числовий масив типу `double` зберігається для наступного розв'язування оберненої задачі.

Розглянемо тепер задачу дефокусування зображення розміру $s \times t$. У термінах (2) маємо $[a; b] = [0; s - 1]$, $[c; d] = [0; t - 1]$, функція розсіювання точки має вигляд [2]
$$h(r, l) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \Delta^2}, & r^2 + l^2 \leq \Delta^2 \\ 0, & \text{інакше} \end{cases} \quad (6)$$
 де Δ – величина змазування, параметр, що обирається. Так само, як і для задачі змазування, будемо вважати, що за межами $[a; b] \times [c; d]$ підінтегральна функція $w(x, y)$ є тотожним нулем. Тоді (2) можна переписати у вигляді

$$Aw \equiv \int_c^d \int_a^b h(x - \xi, y - \eta) w(\xi, \eta) d\xi d\eta = g(x, y) + \delta g, \quad (7)$$

$$a \leq x \leq b, c \leq y \leq d.$$

Далі з використанням методу скінченних сум можна провести дискретизацію рівняння (7), внаслідок чого отримати систему рівностей для визначення правої частини. В даній роботі обчислення інтегралів в (5) і (7) відбувалось за допомогою квадратурної формули Сімпсона.

Застосування методу Фрідмана до розв'язання задачі відновлення змазаного зображення. Розглянемо метод ітеративної регуляризації Фрідмана для розв'язання некоректного рівняння Фредгольма I роду. Основна ідея цього методу полягає у побудові ітеративної схеми, що сходиться до точного розв'язку рівняння за відсутності помилок δ та θ правої частини g та оператора A

$$w^{(m)} = w^{(m-1)} + v(A^*g - A^*Aw^{(m-1)}), m = 1, 2, \dots; w^{(0)} \in H_1, \quad (9)$$

де $w^{(m)}$ – наближений розв'язок рівняння (8), отриманий на m -й ітерації, $m = 0, 1, \dots$, $0 < v < \frac{2}{\|A^*A\|}$ – ітеративний параметр, $A^*: H_2^* \rightarrow H_1^*$ – спряжений з A оператор. При точних g і A схема (9) при будь-якому $w^{(0)} \in H_1$ дає збіжність до розв'язку w рівняння (8), якщо він існує та єдиний, так що $\lim_{m \rightarrow \infty} \|w^{(m)} - w\| = 0$. Якщо ж (8) має кілька розв'язків, то при різних $w^{(0)} \in H_1$ послідовності $\{w^{(m)}\}$ збігаються, взагалі кажучи, до різних розв'язків. Відомо [6], що при $w^{(0)} = 0$ або $w^{(0)} = vg$ послідовність $\{w^{(m)}\}$ збігається до нормального розв'язку $\bar{w} \in H_1$ рівняння (8) такого, що $\|\bar{w}\| = \inf\{\|w\|: Aw = g, w \in H_1\}$. Якщо ж права частина g задана з похибкою: $\|\tilde{g} - g\| \leq \delta$, а $\theta = 0$, то

$$\|\tilde{w}^{(m)} - w\| \leq M_0(m) + c(m)\delta, \quad (10)$$

відповідно, і процесу ітерацій, що в перериванні розходиться при $\eta \equiv (\delta, \theta) \neq 0$ при деякому числі ітерацій $m = m(\eta)$ (яке виступає у ролі параметра регуляризації) такому, що $\|w^{(m(\eta))} - w\| \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow 0$.

Метод ітерацій Фрідмана є одним із найпростіших і достатньо ефективних. Він належить до групи стаціонарних ітеративних методів розв'язання лінійного операторного рівняння першого роду

$$Aw = g, w \in H_1, g \in H_2, \quad (8)$$

де $A: H_1 \rightarrow H_2$ – лінійний цілком неперервний оператор, H_1 і H_2 – гільбертові простори. Ітеративна послідовність наближень будується за формулами [6]

де $M_0(m) = \|w^{(m)} - w\|$, $c(m) = v \sum_{k=0}^{m-1} \|E - vA^*A\|^k \leq \frac{v}{1 - |v\lambda_{\max} - 1|}$, де λ_{\max} – найбільше власне значення оператора A^*A .

Із (10) випливає, що $\frac{\delta}{\lambda_{\max}} < \lim_{m \rightarrow \infty} \|\tilde{w}^{(m)} - w\| = \frac{v\delta}{1 - |v\lambda_{\max} - 1|} < \infty$, тобто послідовність $\{\tilde{w}^{(m)}\}$ у вигляді (9) хоча і збігається до деякого розв'язку \tilde{w}_∞ , але навіть при дуже малому (але скінченному), зокрема обумовленому лише машинними округленнями, значенні δ розв'язку \tilde{w}_∞ може досить сильно відрізнятись від точного розв'язку w (прояв некоректності задачі). Враховуючи, що $M_0(m) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, та обираючи $m(\delta)$ так, щоб $c(m(\delta))\delta \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, отримаємо регуляризуючий алгоритм, при якому $\lim_{\delta \rightarrow 0} \|\tilde{w}^{(m(\delta))} - w\| = 0$.

Стосовно інтегрального рівняння (5) схема ітерацій (9) набуває вигляду

$$w_y^{(m)}(x) = w_y^{(m-1)}(x) + v \left(F(x) - \int_a^b R(x, t) w_y^{(m-1)}(t) dt \right), m \geq 1, \quad (11)$$

$$w_y^{(0)}(x) = 0, a \leq x \leq b,$$

де $F(x)$ і $R(x, t)$ даються формулами

$$F(x) = \int_a^b h(t - x) g_y(t) dt, R(x, t) = R(t, x) = \int_a^b h(y - x) h(y - t) dy, \quad (12)$$

$$0 < v < \frac{2}{\|A^*A\|}, \|A^*A\| = \|R(s, t)\| \leq \sqrt{\int_a^b \int_a^b R^2(s, t) ds dt}. \quad (13)$$



Рис. 1. Початкове сіре зображення

За критерій зупинки ітераційного процесу (11)- відновлення методом ітеративної регуляризації Фрідмана (13) в роботі було обрано правило зупинки за ітераційною схемою (11)-(13) з параметром $\nu = 1,99/||A^* A||$. На рис. 2 подано відповідні результати, от-

Чисельні експерименти і аналіз результатів. римані для значення $\Delta = 15$.

Розглянемо кольорове зображення розміру 219×203 , представ-лене на рис. 1 конвертованим в сіре.

Результати дефокусування вихідного зображення при $\Delta = 6$ і відновлення спотвореного зображення мето-

Для цього зображення було виконано змазування дом ітеративної регуляризації Фрідмана з параметром $\nu =$ при різних значеннях величини змазування Δ , а потім $-0,02/||A^* A||$ стосовно до рівняння (7) подано на рис. 3.

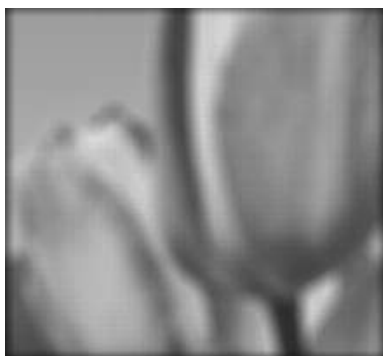


а)

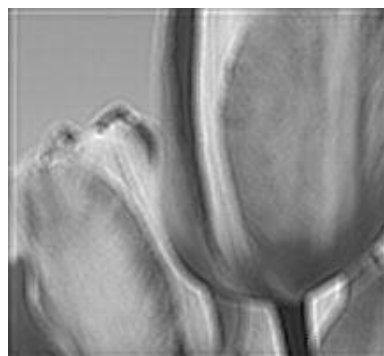


б)

Рис. 2. Змазане зображення (а); відновлене зображення (б)



а)



б)

Рис. 3. Дефокусоване зображення (а); відновлене зображення (б).

Стосовно питання про вибір початкового наближення в ітераційному процесі відновлення зображення обчислення показали, що при нульовому початковому наближенні (яке відповідає чорному зображенню того ж розміру, що й змазане) досягається цілком прийнятна якість відновленого зображення, що підтверджує факт збіжності схеми ітерацій Фрідмана при будь-якому початковому наближенні. Але для досягнення найбільшої точності кінцевого результату слід використовувати всю доступну інформацію про вихідне зображення і розпочинати процес ітерацій із зображення, найбільш близького до вихідного.

Розглянемо шляхи удосконалення програмної реалізації з метою зменшення обчислювальної складності алгоритму.

1. Реалізація обчислювальних схем за методом ітеративної регуляризації Фрідмана для інтегрального рівняння з несиметричним ядром передбачає досить часте звертання до процедур, які повертають значення перетворених за формулами (12) ядра та правої частини в одних і тих же вузлах. Тому цілком доречним є організація процесу обчислень таким чином, щоб уникнути багатократного обчислення значень цих функцій в однакових вузлах. З

цією метою в програмі введені додаткові змінні-словники для ядра та правої частини окремо.

2. Далі, оскільки стандартний клас `Bitmap`, який зазвичай використовується для роботи з зображеннями (допомагає зчитувати файл зображення з жорсткого диску, отримувати дані про кожен піксель зображення, його колір, компоненти цього кольору, змінювати зображення тим чи іншим чином, записувати зображення на жорсткий диск та ін.), є досить навантаженим, робота з ним виявляється досить трудомісткою, що помітно позначається на часі роботи програми. Тому в програмі введені додаткові змінні списки, куди заноситься необхідна інформація про кожен піксель розглядуваного зображення, і надалі обчислення відбуваються з використанням цих списків. Тільки коли сірі компоненти для зображення (змазаного – у випадку розв'язування прямої задачі та відновленого – у випадку оберненої) порашовані, формується саме зображення.
3. Якщо звернутися до формули (3) для ядра $h(r)$ інтегрального рівняння (5), то можна побачити, що згідно з цією формулою підінтегральні функції у

(12) набувають ненульових значень лише на одному підпроміжку $[a; b]$ довжини Δ . У зв'язку з цим дуже доречним є обчислення інтегралу на вужчому проміжку. З урахуванням зазначеного і того, що

$$\int_a^b R(x, t) w_y^{(m-1)}(t) dt = \begin{cases} \frac{1}{\Delta^2} \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} w_y^{(m-1)}(t) dy dt, & \bar{a} \leq \bar{b}, \bar{a} = \max(a, a_1), \bar{b} = \min(b, b_1), \\ & a_1 = \max(x, t) - \Delta, b_1 = \min(x, t), \\ & 0, \text{ інакше.} \end{cases}$$

Аналогічно

$$F(x) = \int_a^b h(t-x) g_y(t) dt = \int_{x-\Delta}^x g_y(t) dt = \int_{\max(a, x-\Delta)}^x g_y(t) dt.$$

Оскільки кожний з розглянутих інтегралів замінюється відповідною скінченною сумою, яка в свою чергу обчислюється за допомогою циклу, то звуження інтервалу інтегрування суттєво зменшує тривалість виконання циклу за рахунок виключення операції сумування нульових компонент.

4. Розглянемо реалізацію методу Фрідмана на послідовності сіток за проекційно-ітераційним принципом [7, 14]. Основна ідея цього підходу полягає в заміні інтегрального рівняння (5) (або (7)) деякою послідовністю більш простих апроксимуючих його скінченновимірних задач на сукупності сіток, що подрібнюються. Для кожної з “наближених” задач за допомогою ітераційної процедури Фрідмана будується лише декілька наближень до розв'язку, останнє з яких за допомогою кусково-лінійної інтерполяції береться за початкове наближення в ітераційному процесі для наступної “наближеної” задачі. Послідовність лінійних інтерполянтів побудованих наближених розв'язків оголошується послідовністю наближень до розв'язку вихідного інтегрального рівняння.

Запропонований підхід, вочевидь, приводить до зменшення обчислювальних витрат на побудову наближень, значна кількість яких будується для “наближених” задач невисокої розмірності. При цьому зазвичай зменшується й похибка отриманого регуляризованого розв'язку.

Зазначимо наприкінці, що без застосування всіх розглянутих способів зменшення обчислювальних витрат програма виконувала відновлення зображення приблизно за 34 години, після впровадження всіх цих способів програма відновлює зображення за 25 хвилин.

Висновки і пропозиції. У роботі розглянуто класичні і запропоновано нові ефективні обчислювальні схеми розв'язання лінійного інтегрального рівняння Фредгольма I роду з несиметричним ядром в одновимірному та двовимірному випадках, задача розв'язання якого є некоректно поставленою. За практичну задачу, що має відповідний математичний опис, було обрано задачу відновлення (реконструкції) спотворених (змазаних та дефокусованих) зображень. Однією з важливих переваг такого вибору є візуальне представлення результатів, що дозволяє робити візуальну оцінку їх похибки без застосування теоретичних формул оцінки похибки регуляризованих розв'язків, використання на практиці яких є досить складним.

У роботі реалізовані такі етапи дослідження:

- для конкретного зображення проведено моделювання змазування відповідно до (1) та дефокусування відповідно до (2), розв'язано прями задачі з шуканими функціями $g_y(x)$ та $g(x, y)$;

поза межами $[a; b]$ функція $w_y(x)$ дорівнює нулю, отримаємо в формулі (11)

- для розв'язання обернених задач (1) і (2), з невідомими функціями $w_y(x)$ і $w(x, y)$ відповідно застосовано обчислювальні схеми, засновані на методі регуляризації Фрідмана, розроблено програмний продукт, що їх реалізує;
- запропоновано декілька способів зменшення обчислювальних витрат під час функціонування програмного продукту, що дають суттєві переваги, в тому числі проекційно-ітераційний підхід, який в задачах відновлення спотворених зображень застосовано вперше;
- проведено порівняльний аналіз розглянутих обчислювальних схем, сформульовані висновки, подані деякі рекомендації користувачеві.

Список літератури

1. Бейтс Р. Восстановление и реконструкция изображений / Р. Бейтс, М. Мак-Доннелл. – М.: Мир, 1989. – 336 с.
2. Бакушинский А.Б. Некорректные задачи. Численные методы и приложения / А.Б. Бакушинский, А.В. Гончарский. – М.: Изд-во МГУ, 1989. – 199 с.
3. Сизиков В.С. Математические методы обработки результатов измерений / В.С. Сизиков. – СПб: Политехника, 2001. – 240 с.
4. Гонсалес Р. Цифровая обработка изображений / Р. Гонсалес, Р. Вудс. – М.: Техносфера, 2006. – 1072 с.
5. Гонсалес Р. Цифровая обработка изображений в среде MATLAB / Р. Гонсалес, Р. Вудс, С. Эддинс. – М.: Техносфера, 2006. – 616 с.
6. Верлань А.Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы / А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков. – К.: Наукова думка, 1986. – 544 с.
7. Гарт Л.Л. Явный проекционно-итерационный метод решения некорректных операторных уравнений / Л.Л. Гарт // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Д.: Вид-во “Ліра”, 2015. – 61-74.
8. Сизиков В.С. Реконструкция смазанных и зашумленных изображений без использования граничных условий / В.С. Сизиков, М.В. Римских, Р.К. Мирджамолов // Оптический журнал. – 2007. – Т. 76, № 5. – С. 38-46.
9. Сизиков В.С. Прием «усечение-размытие-поворот» в восстановлении искаженных изображений / В.С. Сизиков. // Оптический журнал. – 2011. – Т. 78, № 5. – С. 18-26.
10. Сизиков В.С. Обратные прикладные задачи и MatLab / В.С. Сизиков. – СПб: Лань, 2011. – 256 с.

11. Сизиков В. С. Интегральные уравнения и MatLab в задачах томографии, иконки и спектроскопии / В.С. Сизиков. – Saarbrücken: LAP (LAMBERT Academic Publishing), 2011. – 252 с.
12. Сизиков В.С. Реконструкция смазанных и дефокусированных изображений методом регуляризации / В.С. Сизиков, И.А. Белов // Оптический журнал. – 2000. – Т. 67, № 4. – С. 60-63.
13. Тихонов А.Н. Численные методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, А.В. Гончарский, В.В. Степанов, А.Г. Ягола. – М.: Наука, 1990. – 232 с.
14. Гарт Л.Л. О некоторых алгоритмах регуляризации для решения интегральных уравнений / Л.Л. Гарт, Манойло М.В. // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2015. – № 1. – 101-114.